



Lage von Gerade und Ebene I Übung

Gegeben sind im \mathbb{R}^3 die Ebene

$$E_a: 3x_1 - x_2 + (a + 1) \cdot x_3 = 6 \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

sowie die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}.$$

1. Geben Sie die besondere Lage von E_a im Koordinatensystem in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ an.
2. Bestimmen Sie die Lage von g bezüglich der Ebenen E_a in Abhängigkeit vom Parameter a .
3. Ermitteln Sie die Spurpunkte von g .

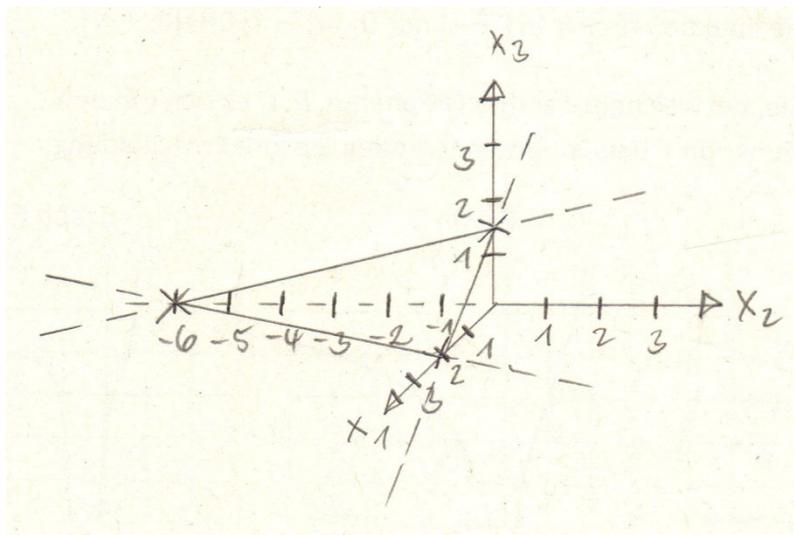
Setzen Sie ab hier $a = 3$.

4. Skizzieren Sie die Ebene E_3 in ein Koordinatensystem ein.
5. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der Ebene E_3 an. Verwenden Sie hierzu Ihre bisherigen Ergebnisse.

Lage von Gerade und Ebene I

Lösung

1. Für $a = -1$ ist E_{-1} parallel zur x_3 - Achse.
2. g in E_a : $3(2 - 3r) - (-1 + r) + (a + 1) \cdot 2r = 6$
 $6 - 9r + 1 - r + 2ar + 2r = 6$
 $-8r + 2ar = -1$
 $-2r(4 - a) = -1$
 1. Fall: $a = 4 \Rightarrow g$ parallel zu E_4
 2. Fall: $a \neq 4 \Rightarrow$ genau ein Schnittpunkt
3. $S_{12}(2; -1; 0)$ für $r = 0$
 $S_{13}(-1; 0; 2)$ für $r = 1$
 $S_{23}\left(0; -\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ für $r = \frac{2}{3}$
4. Die Spurpunkte der Ebene $E_3: 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$
Die Spurpunkte von E_3 sind
 $S_1(2; 0; 0)$, $S_2(0; -6; 0)$ und $S_3\left(0; 0; \frac{3}{2}\right)$.



5. Für $a = 3$ ergibt sich nach Teilaufgabe 2 der Wert $r = \frac{-1}{-2(4-a)} = \frac{1}{2}$.
Damit ist $S\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$.